Тема 9

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Отговор	**Г**	**В**	**Б**	**В**	**Б**	**В**	**А**	**Г**	**Г**	**Б**	**В**	**Б**	**А**	**Б**	**А**

14. *Упътване:* Приложете формулата за пълната вероятност за пълната група от събития H_1 = {Избран е ученик от едната паралелка на 12. клас.} и H_2 = {Избран е ученик от другата паралелка на 12. клас.} и събитието A = {Избраният ученик е момче.}.

16. *Решение:* **а) I начин:** Използваме схемата на Хорнер.
Рационалните корени на уравнението за измежду числата
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{2}{3}$.

	6	5	–38	5	6
2	6	17	–4	–3	0
–3	6	–1	–1	0	

Получаваме $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = (x-2)(x+3)(6x^2 - x - 1)$. Корените са $-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2$.

II начин: Разглеждаме уравнението като реципрочно. Делим на $x^2 \neq 0$ и групираме по равните коефициенти $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$. Полагаме $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2x \,.\, \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Получаваме уравнението $6t^2 + 5t - 50 = 0$ с корени $-\frac{10}{3}; \frac{5}{2}$. Връщаме се в полагането и получаваме

$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3; -\frac{1}{3}$.

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = 2; \frac{1}{2}$.

б) Решаваме неравенството $(x-2)(x+3)(6x^2 - x - 1) > 0$ с метода на интервалите и получаваме $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

$b = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5\,.\,3x} = \frac{5}{3} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}$. Числото не е решение на неравенството.

17. *Решение:* **а)** Корените на уравнението $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1) = 0$ са 0 и 1. Следователно функцията има локални екстремуми при $x = 0$ и $x = 1$.

$f(x)$ расте $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

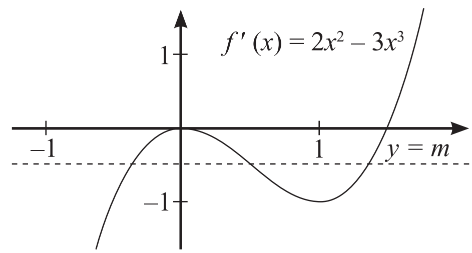
$f(x)$ намалява $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

$f''(x) = 12x^2 - 6$; $f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow f(0) = 0$ е локален максимум.

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f(1) = -1$ е локален минимум.

Ако $x \in (-\infty; 0)$, то $f(x) \in (-\infty; 0)$. Ако $x \in (0; 1)$, то $f(x) \in (-1; 0)$.

Ако $x \in (1; \infty)$, то $f(x) \in (-1; \infty)$.



б) Броят на корените съответства на броя на пресечните точки на графиката на функцията с правата $y = m$.

При $m \in (-\infty; -1)$ уравнението има 1 корен.

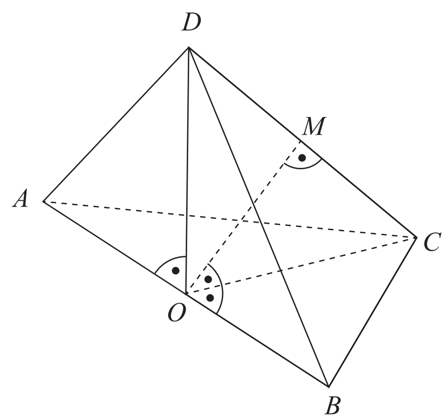
При $m = -1$ уравнението има 2 корена.

При $m \in (-1; 0)$ уравнението има 3 корена.

При $m = 0$ уравнението има 2 корена.

При $m \in (0; \infty)$ уравнението има 1 корен.

18. *Решение:* Всички околни ръбове образуват равни ъгли с равнината на основата, следователно те са равни и върхът D се проектира в центъра на описаната окръжност за основата, което е средата O на AB. От лицето на основата получаваме $AC = BC = 2$ cm, а от питагоровата теорема – $AB = 2\sqrt{2}$ cm. От $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OBD = 45^\circ$ следва, че ΔABD е равнобедрен и правоъгълен, следователно е еднакъв на ΔABC.



а) Получаваме, че $AC = BC = AD = BD = CD = 2$ cm $\Rightarrow$ точка O е на равни разстояния от върховете на пирамидата $\Rightarrow OA = OB = OC = OD = \sqrt{2}$ cm.

$$V = \frac{S_{\Delta ABC} \, . \, OD}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3.$$

б) Нека M е средата на $CD \Rightarrow OM \perp CD$ като медиана в равнобедрен триъгълник.

От $\left.\begin{matrix} AB \perp OD \\ AB \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (OCD) \Rightarrow AB \perp OM \in (OCD)$, следователно OM е търсената ос отсечка. Намираме, че $OM = 1$ cm като медиана в правоъгълния ΔCOD.